C1 2024 0 EE2 2024-0 JLA RSC Sol VF

Calculo I (Universidad de Lima)

Escanea para abrir en Studocu

Studocu no está patrocinado ni avalado por ningún colegio o universidad.
Descargado por Alexis Abendaño (eterias29@gmail.com)

UNIVERSIDAD DE LIMA

PROGRAMA DE ESTUDIOS GENERALES
ASIGNATURA: CÁLCULO I
CICLO: 2024-0
TIEMPO: 90 minutos

UNA SOLUCIÓN DEL EXAMEN ESCRITO 2

---

1. (5 Puntos) Dada la función

$$f(x) = \frac{3x^2 + x\sqrt{4x^2 - 4x - 24}}{x^2 - 6x + 5},$$

a) (1 P) Encuentre el dominio de f.
b) (4 P) Utilice límites para hallar las ecuaciones de las asíntotas verticales y horizontales del gráfico de la función f, en caso de que estas existan.

Solución

a) $Dom(f) = \{x \in \mathbb{R} / 4x^2 - 4x - 24 \geq 0 \ \wedge \ x^2 - 6x + 5 \neq 0\}$ (0,5 P)

$Dom(f) = \langle -\infty; -2] \cup [3; 5\rangle \cup \langle 5; +\infty\rangle$ (0,5 P)

b) **Asíntota Vertical:**

$$\lim_{x \to 5^+} \frac{3x^2 + x\sqrt{4x^2 - 4x - 24}}{x^2 - 6x + 5} \left(\frac{75 + 5\sqrt{56}}{0^+}\right) = +\infty$$ (0,5 P)

A. V. $\boldsymbol{x = 5}$ (0,5 P)

Asíntotas Horizontales:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3x^2 + x\sqrt{4x^2 - 4x - 24}}{x^2 - 6x + 5} = \lim_{x \to +\infty} \frac{3x^2 + x\sqrt{x^2\left(4 - \frac{4}{x} - \frac{24}{x^2}\right)}}{x^2 - 6x + 5}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2\left(3 + \sqrt{4 - \frac{4}{x} - \frac{24}{x^2}}\right)}{x^2\left(1 - \frac{6}{x} + \frac{5}{x^2}\right)} = \frac{3 + 2}{1} = 5$$

A.H.D. $\boldsymbol{y = 5}$ (Por el cálculo del límite 1 *P* y por la Ecuación de la asíntota 0,5 *P*)

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{3x^2 + x\sqrt{4x^2 - 4x - 24}}{x^2 - 6x + 5} = \lim_{x \to -\infty} \frac{3x^2 + x\sqrt{x^2\left(4 - \frac{4}{x} - \frac{24}{x^2}\right)}}{x^2 - 6x + 5}$$

Descargado por Alexis Abendaño (eterias29@gmail.com)

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{3x^2 - x^2\sqrt{4-\frac{4}{x}-\frac{24}{x^2}}}{x^2-6x+5} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2\left(3-\sqrt{4-\frac{4}{x}-\frac{24}{x^2}}\right)}{x^2\left(1-\frac{6}{x}+\frac{5}{x^2}\right)} = \frac{3-2}{1} = 1$$

A.H.I. $\boldsymbol{y = 1}$ (Por el cálculo del límite 1 *P* y por la ecuación de la asíntota 0,5 *P*)

2. (3 Puntos) Dada la función

$$f(x) = (2x-5)^3(3x-8)^4 + \frac{2x-4}{\sqrt{4-x}}$$

a) (2 P) Utilice las reglas de derivación para hallar $f'(x)$.
b) (1 P) Halle la ecuación de la recta normal al gráfico de f en el punto de abscisa $x = 3$.

Solución

a) $f'(x) = 3(2x-5)^2(2)(3x-8)^4 + (2x-5)^3(4)(3x-8)^3(3) + \dfrac{2\sqrt{4-x} - \frac{(2x-4)(-1)}{2\sqrt{4-x}}}{\left(\sqrt{4-x}\right)^2}$

(1 P el producto y 1 P El cociente)

b) $f(3) = 3,\ \ f'(3) = 21$ (0,5 P)

Ecuación de la normal L_n: $\boldsymbol{y - 3 = \frac{-1}{21}(x-3)}$ (0,5 P)

3. (5 Puntos) Se estima que el precio de una casa en una zona de la ciudad de Lima (en miles de dólares) se puede calcular mediante la función

$$P(t) = \frac{200t^2 + t + 300}{2t^2 + 4t + 2}, \quad t \geq 0,$$

donde t representa el número de años transcurridos desde el 1 de enero de 2017.

a) (0,5 P) ¿Cuál fue el precio de la casa el 1 de enero de 2017?
b) (1,5 P) Calcule $\lim_{t\to+\infty} P(t)$ e interprete el resultado obtenido en el contexto del problema.
c) (1,5 P) Halle la razón de cambio de P con respecto a t cuando $t = 1$.
d) (1,5 P) Calcule $P'(9)$ e interprete el resultado.

Solución

a) $P(0) = 150$
Interpretación: El precio de la casa el 1 de enero de 2017 fue de 150 000 dólares. (0,5 P)

b) $\lim_{t\to+\infty} \frac{200t^2 + t + 300}{2t^2 + 4t + 2} = 100$ (0,5 P)
Interpretación: Después de muchos años, a largo plazo, el precio de la casa se aproxima o tiende a 100 000 dólares. (1 P)

Descargado por Alexis Abendaño (eterias29@gmail.com)

c) $P'(1) = \dfrac{-25}{2} = -12{,}5$ (0,5 P)

Interpretación: El 1 de enero de 2018, el precio de la casa disminuía a razón de 12 500 dólares por año aproximadamente.
(1 P)

d) $P'(9) = \dfrac{187}{125} = 1{,}496$ (0,5 P)

Interpretación: El 1 de enero de 2026, el precio de la casa aumentará a razón de 1496 dólares por año aproximadamente.
(1 P)

4. (3 Puntos) Dada la función

$$f(x) = \sqrt{5x-1},$$

halle $f'(2)$ mediante la definición de derivada.

Solución

$f'(2) = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}) = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{5x-1}-3}{x-2}$	**(1 P)**
$f'(2) = \underbrace{\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\left(\sqrt{5x-1}-3\right)\left(\sqrt{5x-1}+3\right)}{(x-2)\left(\sqrt{5x-1}+3\right)}}_{\text{0.5 P}} = \underbrace{\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{(5x-10)}{(x-2)\left(\sqrt{5x-1}+3\right)}}_{\text{0.5 P}}$ $= \underbrace{\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{5(x-2)}{(x-2)\left(\sqrt{5x-1}+3\right)} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{5}{\left(\sqrt{5x-1}+3\right)}}_{\text{0.5 P}}$	**(1,5 P)**
$f'(2) = \dfrac{5}{6}$	**(0,5 P)**

5. (4 Puntos) Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{5x^2+1}{3x^2-1} - 6 & , \quad x < -1 \\ Bx^2 + Ax + C & , \quad -1 \le x < 1 \\ 5x - 2\sqrt{4x-3} & , \quad x \ge 1 \end{cases}$$

Descargado por Alexis Abendaño (eterias29@gmail.com)

halle los valores de las constantes A, B y C, sabiendo que f es continua en $x = -1$ y derivable en $x = 1$.

Solución

f es continua en $x = -1$: $f(-1) = \lim\limits_{x \to -1^-} \dfrac{5x^2+1}{3x^2-1} - 6 = -3 = \lim\limits_{x \to -1^+} (Bx^2 + Ax + C)$ $\Rightarrow \quad B - A + C = -3$	**(0,5 P)** **(0,5 P)**
f es continua en $x = 1$: $f(1) = \lim\limits_{x \to 1^-} (Bx^2 + Ax + C) = \lim\limits_{x \to 1^+} \left(5x - 2\sqrt{4x-3}\right)$ $\Rightarrow B + A + C = 3$	**(0,5 P)** **(0,5 P)**
$f'(x) = \begin{cases} \ldots, & x < -1 \\ 2Bx + A, & -1 < x < 1 \\ 5 - \dfrac{4}{\sqrt{4x-3}}, & x \geq 1 \end{cases}$ f es derivable en $x = 1$: $f'(1^+) = 1 = 2B + A = f'(1^+)$	**(0,5 P)** **(0,5 P)**
$A = 3, \quad B = -1, \quad C = 1$.	**(1 P)**

Los profesores del curso

Descargado por Alexis Abendaño (eterias29@gmail.com)